Examen de Électromagnétisme - PEIP 2

16 novembre 2021

4 Exercices recto-verso / Durée de l'épreuve 2 heures.

Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes standards autorisées

Les questions 1. et 2. s'appuient sur la figure (a), système de trois charges dans le plan xOy ci-dessous. Les charges sont $(-q, -q, 2q)$ et elles sont respectivement placées aux positions : $P_1 = (a, a)$, $P_2 = (a, -a)$ et $P_3 = (0, 0)$.

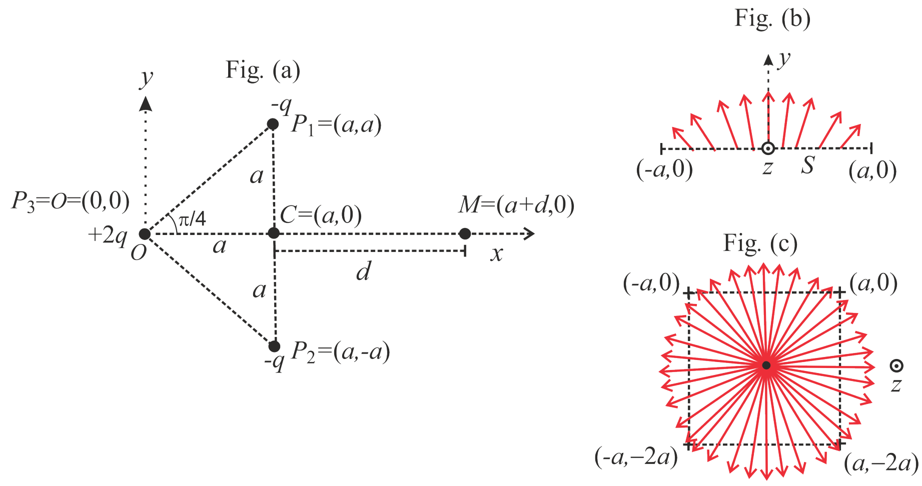

FIGURE 1 – (a) Système de trois charges (b) Flux électrique à travers une surface ouverte, c) Lignes de champ électriques associées avec une ligne infinie de charge.

1. **Calcul de champ électrique** :

   (a) Trouver le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}_1(M)$ à la position, M, produit uniquement par la charge $-q$ à la position $P_1 = (a, a)$ (en fonction de a, d et ϵ_0).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}} &= -a\vec{\boldsymbol{u}}_y + d\vec{\boldsymbol{u}}_x \quad , \quad P_1M = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}}\right| = \sqrt{a^2+d^2} \\ \vec{\boldsymbol{E}}_1(M) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}}}{P_1M^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-a\vec{\boldsymbol{u}}_y + d\vec{\boldsymbol{u}}_x}{(a^2+d^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

   (b) Trouver le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}_{1+2}(M)$ produit à la position $M = (a+d, 0)$ par les deux charges sources, $-q$, aux positions $P_1 = (a, a)$ et $P_2 = (a, -a)$. Exprimer ce champ sous la forme $\vec{\boldsymbol{E}}_{1+2}(M) \propto \frac{\vec{\boldsymbol{u}}_x}{d^2} f(a/d)$ et montrer que lorsque $a/d \to 0$, ce champ tend vers celui produit par une charge $-2q$ à la position $(a, 0)$.

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{E}}_2(M) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\vec{\boldsymbol{u}}_y + d\vec{\boldsymbol{u}}_x}{(a^2+d^2)^{3/2}} \\ \vec{\boldsymbol{E}}_{1+2}(M) = \vec{\boldsymbol{E}}_1(M) + \vec{\boldsymbol{E}}_2(M) &= -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d^2}\frac{\vec{\boldsymbol{u}}_x}{\left(1+\left(\frac{a}{d}\right)^2\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

   Donc, dans la limite, $a/d \to 0$:

$$\lim_{a/d\to 0}\left[\vec{\boldsymbol{E}}_1(M) + \vec{\boldsymbol{E}}_2(M)\right] = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d^2}\vec{\boldsymbol{u}}_x \qquad \text{CQFD .}$$

   (c) Écrire le champ électrique, $\vec{\boldsymbol{E}}_{\text{tot}}(M)$, produit à la position, M, par l'ensemble des trois charges dans la figure (a). Indiquer la direction du champ $\vec{\boldsymbol{E}}_{\text{tot}}(M)$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{M}} &= (a+d)\,\vec{\boldsymbol{u}}_x \\ \vec{\boldsymbol{E}}_3(M) &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{M}}}{(P_3M)^3} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\boldsymbol{u}}_x}{(a+d)^2} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d^2}\frac{\vec{\boldsymbol{u}}_x}{\left(1+\frac{a}{d}\right)^2} \end{aligned}$$

alors que nous avons déjà trouvé que les champs $\vec{\boldsymbol{E}}_1(M)+\vec{\boldsymbol{E}}_2(M)$ sont :

$$\vec{\boldsymbol{E}}_1(M)+\vec{\boldsymbol{E}}_2(M) = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d^2}\frac{\vec{\boldsymbol{u}}_x}{\left(1+\left(\frac{a}{d}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Le champ total, $\vec{\boldsymbol{E}}_{\text{tot}}(M)$, des 3 charges est donc :

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}_{\text{tot}}(M) &= \vec{\boldsymbol{E}}_1(M)+\vec{\boldsymbol{E}}_2(M)+\vec{\boldsymbol{E}}_3(M)\\ &= \frac{2q\vec{\boldsymbol{u}}_x}{4\pi\epsilon_0 d^2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{a}{d}\right)^2}-\frac{1}{\left(1+\left(\frac{a}{d}\right)^2\right)^{3/2}}\right]\end{aligned} \tag{1}$$

Il s'agit ici d'un dipôle (non ponctuel) orienté dans la direction $-\vec{\boldsymbol{u}}_x$. Le champ électrique au point M donc sera aussi dans la direction $-\vec{\boldsymbol{u}}_x$ à la droite du dipôle. Vous pouvez aussi raisonner que le barycentre de charge positive est plus loin de M que le barycentre de charge négative (ou encore vous pouvez effectuer un développement limité de l'éq.(1)).

(d) Expliquer comment les résultats dans les trois cas (a)-(c) sont tous en accord avec les symétries respectives des problèmes posés.

Le plan xOy est un plan de symétrie pour tout les problèmes et le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ se trouve toujours dans ce plan dans les trois questions. Pour les questions (b) et (c), le plan xOz est également un plan de symétrie est le champ doit se trouver dans une direction $\pm\vec{\boldsymbol{u}}_x$ comme nous avons trouvé dans ces deux cas.

2. Moment dipolaire et énergie :

(a) Trouver le moment dipolaire, $\vec{\boldsymbol{p}}$, du système des trois charges dans la Fig. (a).

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{p}} &= \sum_i q_i\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_i} = -q\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_1} + -q\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_2}\\ &= \left(-qa\vec{\boldsymbol{u}}_x + qa\vec{\boldsymbol{u}}_y\right) + \left(-qa\vec{\boldsymbol{u}}_x - qa\vec{\boldsymbol{u}}_y\right)\\ &= -2qa\vec{\boldsymbol{u}}_x = -p\vec{\boldsymbol{u}}_x\ ,\end{aligned}$$

avec $p=2qa$.

(b) Trouver l'énergie électrique, $\mathcal{E}_e$, du système des trois charges dans la Fig. (a).

Les distances entre paires de charges sont :

$$r_{13} = r_{23} = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{OP}_1}\right| = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2} \quad , \quad r_{12}=2a$$

L'énergie électrostatique du système est donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\text{paires}}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{2q^2}{r_{13}}-\frac{2q^2}{r_{23}}+\frac{q^2}{r_{12}}\right)\\ &= \frac{q^2}{4\pi a\epsilon_0}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right) = \frac{q^2}{8\pi a\epsilon_0}\left(1-4\sqrt{2}\right)\ ,\end{aligned}$$

ce qui est négative. Donc le système est électromagnétiquement lié.

Le champ électrique d'un dipôle électrique «ponctuel» de moment $\vec{p}$ s'écrit :

$$\vec{E}\,(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\,(\vec{p}\cdot\vec{u}_r)\,\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$$

Ici, $\vec{u}_r = \vec{r}/|\vec{r}|$ est un vecteur normalisé.

(c) Trouver le champ $\vec{E}_{\parallel}(M)$ d'un dipôle $\vec{p} = p\vec{u}_x$ positioné au point $C = (a, 0)$ et orienté *parallèle* à la direction $\overrightarrow{CM}$. Ensuite trouver le champ $\vec{E}_{\perp}(M)$ par un dipôle $\vec{p} = p\vec{u}_y$ au même point C (mais maintenant *perpendiculaire* à la direction $\overrightarrow{CM}$.) (n.b. les réponses ne dépendent pas des questions (a) et (b)).

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\parallel}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3p\vec{u}_x - p\vec{u}_x}{d^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p\vec{u}_x}{d^3}\\ \vec{E}_{\perp}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-p\vec{u}_y}{d^3}\,.\end{aligned}$$

3. **Questions courtes :**

(a) La force de répulsion électrique entre deux charges ponctuelles de 1C et distantes de 1 km est de l'ordre de grandeur du poids exercé par 1 tonne.

A. Vrai B. Faux (Justification de votre réponse)

$$\left|\vec{F}_e\right| = \left|\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{d^2}\right| = \left|9\times 10^9\frac{1}{(10^3)^2}\right| \simeq \left|10^4\right|\mathrm{N}$$

et la force sur 1kg est $\simeq 9,8$N et puisqye une tonne est 10^3kg, la force sur une tonne est : $9,8\times 10^3 \simeq 10^4$N, CQFD.

(b) Soit une distribution de charges possédant le plan d'anti-symétrie $(\Pi^*) = (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.
— En un point M quelconque de ce plan, le champ électrostatique créé par la distribution est de la forme : $\vec{E}(M) = E_x(M)\vec{u}_x + E_y(M)\vec{u}_y$.

A. Vrai **B. Faux** (Justification de votre réponse)

On a vu en cours que pour un point M quelconque d'un plan d'anti-symétrie, le champ électrique doit être *perpendiculaire* à ce plan, donc $\vec{E}(M)$ doit être de la forme $\vec{E}(M) = E_z(M)\vec{u}_z$.

(c) En coordonnées sphériques, calculer : $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left(r\vec{u}_\phi\right)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{rot}}\vec{A}\,(r,\theta,\phi) &= \frac{\vec{u}_r}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\,(r\sin\theta)}{\partial\theta}\right] + \frac{\vec{u}_\theta}{r}\left[-\frac{\partial(r^2)}{\partial r}\right]\\ &= \vec{u}_r\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 2\vec{u}_\theta = \frac{\vec{u}_r}{r}\cot\theta - 2\vec{u}_\theta\,.\end{aligned}$$

(d) On considère un potentiel $V(x,y,z) = Cx^2z$, en unité S.I.

A. Donner la dimension de la constante C.

$$[C] = \mathrm{Vm}^{-3}$$

B. Donner le champ électrique $\vec{E}(x,y,z)$ associé à $V(x,y,z)$.

$$\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}V(x,y,z) = -C2x\vec{u}_x - Cx^2\vec{u}_z$$

C. Donner la densité de charge volumique $\rho(x,y,z)$ associée à $V(x,y,z)$.

$$\begin{aligned}&\frac{\rho(x,y,z)}{\epsilon_0} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(x,y,z) = -\Delta V = -C2z\\ &\Rightarrow \rho(x,y,z) = -C2z\epsilon_0\end{aligned}$$

4. **Flux et théorème de Gauss**

On considère un champ électrique de la forme :

$$\vec{\boldsymbol{E}}\,(x) = C\left(\frac{x}{a^2+x^2}\vec{\boldsymbol{u}}_x + \frac{a}{a^2+x^2}\vec{\boldsymbol{u}}_y\right) \text{S.I.}\,, \tag{2}$$

où a est une constante de dimension longueur.

(a) Donner la dimension de la constante, C.

Puisque le champ électrique a les unités de Vm^{-1} et la quantité en parenthèse a les unité de m^{-1}

$$[C] = \mathrm{V}$$

(b) Calculer le flux électrique, $\Phi_S = \iint_S \vec{\boldsymbol{E}}(x)\cdot d\vec{\boldsymbol{S}}$, à travers une *surface ouverte* : $\vec{\boldsymbol{S}} = S\vec{\boldsymbol{u}}_y$, ayant les propriétés suivantes : S est une surface rectangulaire dans un plan y constant, et centrée sur l'origine : $S(x \in (-a, a)\,, z \in (-L/2, L/2))$, c.-à-d de largeur $2a$ en x et de longueur L en z. (Votre résultat devrait être exprimé en fonction de paramètres tel que C, L, et a : voir la Fig.(b) pour un schéma).

Le champ $\vec{\boldsymbol{E}}$ de la forme de l'éq.(2) est produit par une ligne infinie de densité de charge linéique, λ_0 ($\mathrm{C\ m}^{-1}$), distribuée de façon homogène sur sa longueur. Cette ligne est orientée selon la direction $\vec{\boldsymbol{u}}_z$ et positionnée à une distance, a, de l'origine du plan S (sur l'axe Oy).

Puisque $d\vec{\boldsymbol{S}} = dS\vec{\boldsymbol{u}}_y = dxdy\vec{\boldsymbol{u}}_y$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_S &= \iint_S \vec{\boldsymbol{E}}(x)\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = C\iint_S \left(\frac{x}{a^2+x^2}\vec{\boldsymbol{u}}_x + \frac{a}{a^2+x^2}\vec{\boldsymbol{u}}_y\right)\cdot\vec{\boldsymbol{u}}_y dS \\
&= C\int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-a}^{a}\frac{a}{a^2+x^2}dx \\
&= CaL\int_{-a}^{a}\frac{dx}{a^2+x^2} = CaL\left[\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{x}{a}\right)}{a}\right]_{-a}^{a} = CL\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

(c) Utiliser la loi de Gauss afin de trouver l'expression de $\vec{\boldsymbol{E}}(\rho,\phi,z)$ produit par une ligne infinie de charge en coordonnées cylindriques, avec z, l'axe du fil.

Sachant que la ligne est positionnée à une distance, a, de la surface S, en déduire l'expression de la constante C dans l'éq.(2) (en fonction de λ_0), et exprimer Φ_S de la question (b) en fonction de λ_0.

Avec le théorème de Gauss, le champ pour une ligne infinie de charge de densité linéique λ_0 est :

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\rho) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0\rho}\vec{\boldsymbol{u}}_\rho$$

A la position $x = 0$, on a $\vec{\boldsymbol{u}}_\rho = \vec{\boldsymbol{u}}_y$ et $\rho = a$, donc $\vec{\boldsymbol{E}}\,(x=0) = \frac{C}{a}\vec{\boldsymbol{u}}_y = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 a}\vec{\boldsymbol{u}}_y$, et la valeur de C est :

$$C = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0}\,,$$

$$\Phi_S = CL\frac{\pi}{2} = \frac{\lambda_0}{2\epsilon_0\pi}L\frac{\pi}{2} = \frac{L\lambda_0}{4\epsilon_0}\,.$$

(d) Exploiter la loi de Gauss (s'appliquant sur une *surface fermée*) afin d'arriver au flux électrique sur la *surface ouverte*, Φ_S, de la question (b) sans calculer l'intégrale du flux directement (Indice : Exploiter la symétrie du problème : voir la Fig. (c) pour un schéma).

On met une boite fermée de section carrée et de longeur L centrée sur la ligne de charge domme dans la Fig.(c). On voit par symétrie que le flux de Φ_S est simplement le quart du flux totale sur la surface fermée (il n'y a pas de flux à travers extremités, donc on voit que $\Phi_S = \frac{\Phi_{\text{tot}}}{4}$. Avec le théorème de Gauss, on a :

$$\Phi_{\text{tot}} = \iint_S \vec{\boldsymbol{E}}(x) \cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{L\lambda_0}{\epsilon_0} \implies \Phi_S = \frac{\Phi_{\text{tot}}}{4} = \frac{L\lambda_0}{4\epsilon_0}\ .$$

Ce qui est en accord avec (c) comme il se doit.

Formules *possiblement* utiles :

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\text{atan}\left(\frac{x}{a}\right)}{a} \quad , \quad \int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(a^2+x^2\right)$$

où atan(x) est aussi appelé arctan(x) ou inverse tangent ($\tan^{-1}x$, sur les calculettes). Des valeurs importantes sont : atan(1)=-atan(-1)=$\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9\times 10^9 \text{ S.I.} \qquad \overrightarrow{\textbf{grad}}\left(f\left(r,\theta,\phi\right)\right) = \vec{\boldsymbol{u}}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \vec{\boldsymbol{u}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{\boldsymbol{u}}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

$$\overrightarrow{\textbf{rot}}\vec{\boldsymbol{A}}\left(r,\theta,\phi\right) = \frac{\vec{\boldsymbol{u}}_r}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(A_\phi\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \frac{\vec{\boldsymbol{u}}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial\left(rA_\phi\right)}{\partial r}\right] + \frac{\vec{\boldsymbol{u}}_\phi}{r}\left[\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial\left(A_r\right)}{\partial\theta}\right]$$